Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung 9 im Wintersementer 2020/21 (am 8.01.21)

Hinweis zu den im Text verwendeten Referenzen

Referenz	Bedeutung
x.y.z	Verweist auf den Abschnitt x.y.z im PDF-File zu Kapitel x, z.B verweist 3.2.1 auf Abschnitt 3.2.1 im PDF-File zu Kapitel 3.
Vorlesung x, y.z	Verweist auf den Abschnitt y.z im Text zu Vorlesung x.

Grundlegende Ergebnisse zur Theorie der linearen algebraischen Gruppen

11 Der Einbettungssatz

Jede lineare algebraische Gruppe G ist isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe einer allgemeinen linearen Gruppe $\mathbf{GL}_n$.

Beweis.

1. Schritt. Konstruktion eines Homomorphismus ϕ affiner algebraischer Gruppen.

Wir betrachten die Operation von G auf sich selbst durch Rechtstranslationen,

$$a: G \times G \longrightarrow G,\ (g, x) \mapsto x\cdot g^{-1}$$

und bezeichnen mit

$$\rho: G \longrightarrow GL(k[G]),\ g \mapsto \rho(g),$$

die zugehörige Operation von G auf k[G], d.h.

$$(\rho(g)\cdot f)(x) := f(a(g^{-1},x)) = f(x\cdot(g^{-1})^{-1}) = f(x\cdot g)$$

für $g \in G$, $f \in k[G]$ und $x \in G$ (vgl. l0.3). Wir wählen einen endlich-dimensionalen k-Vektorraum

$$V \subseteq k[G],$$

der ein Erzeugendensystem der k-Algebra k[G] enthält. Indem wir diesen geeignet vergrößern, können wir erreichen, daß V G-stabil bezüglich ρ ist (vgl. 10.3 (i)), d.h.

$$\rho(g)(V) \subseteq V \text{ für jedes } g \in G.$$

Nach dem Satz 9.3 von Vorlesung 7 über lokale Endlichkeit gilt dann

$$a^*(V) \subseteq k[G]\otimes_k V.$$

Wir wählen eine k-Vektorraumbasis von V, sagen wir

$$V = k\cdot f_1 + \dots + k\cdot f_n \quad \text{mit } n := \dim_k V.$$

Weil V die k-Algebra k[G] erzeugt, gilt auch

$$k[G] = k[f_1,\dots, f_n].$$

Für $g \in G$ und $x \in G$ gilt

$$\rho(g)f_i(x) = f_i(a(g^{-1}, x)) = f_i(xg) = \sum_{j=1}^{n} m_{ji}(g)\otimes f_j(x) \text{ mit } m_{ij} \in k[G].$$

also

$$\rho(g)f_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ji}(g)\cdot f_j. \tag{1}$$

Weil die f_j linear unabhängig sind, sind die Funktionen m_{ij} als Funktionen $G \longrightarrow k$ durch diese Relation eindeutig bestimmt. Speziell für g = e erhalten wir

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ji}(e)\bullet f_j.$$

Weil die f_i linear unabhängig sind, folgt

$$m_{ij}(e) = \delta_{ij} \text{ für } i,j = 1,...,n. \tag{2}$$

Weil die m_{ij} in k[G] liegen, ist die Abbildung

$$\phi\colon G \longrightarrow \mathbf{M}_n = \mathbb{A}^{n^2},\ g \mapsto (m_{ij}(g))_{i,j=1,...,n}\ ,$$

ein Morphismus affiner algebraischer Varietäten. Direkt aus der Definition von ρ lesen wir ab

$$\rho(g'\bullet g'') = \rho(g')\circ\rho(g'') \text{ für beliebige } g', g'' \in G.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\rho(g'\bullet g'')f_i &= \rho(g')(\rho(g'')f_i) \\
&= \rho(g')\Big(\sum_{\alpha=1}^{n} m_{\alpha i}(g'')\bullet f_\alpha\Big) && \text{(nach (1))} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} m_{\alpha i}(g'')\bullet\rho(g')(f_\alpha) && \text{($\rho(g')$ ist k-linear)} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} m_{\alpha i}(g'')\bullet\Big(\sum_{j=1}^{n} m_{j\alpha}(g')\bullet f_j\Big) && \text{(nach (1))} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{\alpha=1}^{n} m_{j\alpha}(g')\bullet m_{\alpha i}(g'')\Big)\bullet f_j
\end{aligned}$$

Wir vergleich mit (1) für $g = g'\bullet g''$ und erhalten

$$m_{ji}(g'\bullet g'') = \sum_{\alpha=1}^{n} m_{j\alpha}(g')\bullet m_{\alpha i}(g'') \text{ für } i,j = 1,...,n$$

also

$$m_{ij}(g'\bullet g'') = \sum_{\alpha=1}^{n} m_{i\alpha}(g')\bullet m_{\alpha j}(g'') \text{ für } i,j = 1,...,n$$

also

$$\begin{aligned}
\phi(g'\bullet g'') &= \begin{pmatrix} m_{11}(g'\bullet g'') & \dots & m_{1n}(g'\bullet g'') \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1}(g'\bullet g'') & \dots & m_{nn}(g'\bullet g'') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} m_{11}(g') & \dots & m_{1n}(g') \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1}(g') & \dots & m_{nn}(g') \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} m_{11}(g'') & \dots & m_{1n}(g'') \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1}(g'') & \dots & m_{nn}(g'') \end{pmatrix} \\
&= \phi(g')\bullet\phi(g'') && \text{(Matrizen-Multiplikation)}
\end{aligned}$$

Speziell für $g'' = g'^{-1}$ ergibt sich

$$\phi(g')\bullet\phi(g'^{-1}) = \phi(e)$$

Wegen (2) steht rechts die Einheitsmatirx, die Matrizen der Gestalt $\phi(g)$ sind umkehrbar. Wir können ϕ als Morphismus affiner algebraischer Varietäten

$$\phi: G \longrightarrow \mathbf{GL}_n,\ g \mapsto (m_{ij}(g))_{ij=1,...,n},$$

auffassen, und - wie wir gerade gesehen haben - ist ϕ auch ein Homomorphismus von Gruppen.

2. <u>Schritt</u>. ϕ ist injektiv.

Für $g \in \mathrm{Ker}(\phi)$, d.h. $\phi(g)$ ist die Einheitsmatrix, gilt $m_{ij}(g) = \delta_{ij}$ für alle i und j, also nach (1)

$$\begin{aligned}\rho(g)f_i &= \sum_{j=1}^{n} m_{ji}(g)\bullet f_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \delta_{ji}\bullet f_j \\ &= f_i\end{aligned} \qquad (3)$$

für $i = 1,..., n$. Weil $\rho(g)$: $k[G] \longrightarrow k[G]$, $f(x) \mapsto f(xg)$, ein k-Algebra-Homomorphismus ist und

$$k[G] = k[f_1,..., f_n]$$

als k-Algebra von den f_i erzeugt wird, ist s(g) mit (3) die identische Abbildung von k[G],

$$\rho(g) = \mathrm{Id} \text{ für } g\in \mathrm{Ker}(\phi),$$

d.h. es gilt $f(xg) = f(x)$ für jedes $f \in k[G]$ und jedes $x \in G$. Dies ist insbesondere für $x = e$ der Fall, d.h. $f(g) = f(e)$ für jedes $f \in k[G]$. Die Punkte g und e von G haben dieselben Koordinaten, sind also gleich, $g = e$. Der Kern von ϕ ist trivial, und ϕ ist injektiv.

3. <u>Schritt</u>. Beweis der Behauptung.

Der durch

$$\phi: G \longrightarrow \mathbf{GL}_n$$

induzierte k-Algbra-Homomorphismus der Koordinatenringe

$$\phi^*: k[T_{ij} , \det(T_{ij}) \mid i,j=1,..., n] \longrightarrow k[G]$$

ist gegeben durch

$$\phi^*(T_{ij}) = T_{ij}\circ\phi = m_{ij} \text{ für } i,j = 1,..., n \text{ und}$$

$$\phi^*(\det(T_{ij})) = \det (\phi^*(T_{ij})) = \det (m_{ij}).$$

Insbesondere liegen die m_{ij} im Bild von ϕ^*,

$$m_{ij} \in \mathrm{Im}(\phi^*).$$

Aus (1) erhalten wir

$$f_i(xg) = \rho(g)f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} m_{ji}(g)\bullet f_j(x) \quad \text{für beliebige } g,x \in G$$

also speziell für $x = e$:

$$f(g) = \sum_{j=1}^{n} m_{ji}(g)\cdot f_j(e),$$

d.h.

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ji}\cdot f_j(e).$$

Die Funktion f_i ist eine Linearkombination der $m_{ji} \in \mathrm{Im}(\phi^*)$ mit Koeffizienten $f_j(e) \in k$, liegt also auch in $\mathrm{Im}(\phi^*)$. Das Bild von

$$\phi^*: k[\mathbf{GL}_n] \longrightarrow k[G]$$

enthält das Erzeugendensystem $\{f_i\}$ der k-Algebra k[G], d.h.

$$\phi^*: k[\mathbf{GL}_n] \twoheadrightarrow k[G] \qquad (4)$$

ist surjektiv. Weil ϕ ein Homomorphismus von algebraischen Gruppe ist, ist $\phi(G)$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbf{GL}_n$. Die reguläre Abbildung ϕ ist deshalb die Zusammensetzung

$$\phi = i\circ\phi: G \xrightarrow{\psi} \phi(G) \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbf{GL}_n$$

einer surjektiven regulären Abbildung ψ und der natürlichen Einbettung i der abgeschlossenen Teilmenge $\phi(G)$ in $\mathbf{GL}_n$, d.h. wir haben ein kommutatives Diagramm von Homomorphismen linearer algebraischer Gruppen

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, two heads, "\psi"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ \phi(G) \arrow[r, hook, "i"] & \mathbf{GL}_n \end{tikzcd}$$

mit ψ surjektiv und der natürlichen Einbettung i der abgeschlossenen Untergruppe $\phi(G)$ in die $\mathbf{GL}_n$. Wir gehen zu den zugehörigen k-Algebra-Homomorphismen der Koordinatenring über und erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} k[G] & \\ k[\phi(G)] \arrow[u, tail, "\psi^*"] & k[\mathbf{GL}_n] \arrow[l, two heads, "i^*"'] \arrow[ul, "\phi^*"'] \end{tikzcd}$$

Dabei ist i^* surjektiv, weil i die natürliche Einbettung einer abgeschlossenen Teilvarietät ist, und ψ^* ist injektiv, weil ψ surjektiv ist.
Außerdem ist ϕ^* nach (4) surjektiv. Mit ψ^* ist aber auch ψ^* surjektiv, insgesamt also bijektiv, also ein Isomorphismus. Dann ist aber auch ψ ein Isomorphismus, d.h. G ist isomorph zur abgeschlossenen Untergruppe $\phi(G)$ von $\mathbf{GL}_n$.

QED.

12. Die Jordan-Zerlegung I

12.1 Vormerkungen

(i) Nach dem Satz von der Jordanschen Normalform[1] gibt es für jeden k-linearen Endomorphismus

$$a: V \longrightarrow V$$

eines endlich-dimensionalen k-Vektorraums eine Basis für welche die Matrix von a bezüglich dieser Basis in Jordan-Blöcke zerfällt, sagen wir

$$M(a) = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & J_{n_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}.$$

Dabei seien $\lambda_1,...,\lambda_r \in k$ Elemente des Grunkörpers, $n_1,...,n_r \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen. Mit $J_n(\lambda)$ bezeichenen wir die n×n-Matrix

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda\bullet 1 + J_n$$

und mit $J_n = J_n(0)$, die Matrix, deren einzige von 0 verschiedene Einträge gleich 1 sind und ein Position über der Hauptdiagonalen stehen. Mit anderen Worten, M(a) zerfällt in eine Summe von zwei Matrizen, sagen wir

$$M(a) = D + N,$$

mit einer Diagonal-Matrix D und einer Matrix N, deren einzige von 0 verschiedene Einträge gleich 1 sind und sich eine Position über der Hauptdiagonalen befinden.

(ii) Das Ziel dieses Abschnitts besteht darin, die obigen Aussagen so umzuformulieren, daß sie sich in der Theorie der linearen algebraischen Gruppen anwenden lassen. Dazu müssen wir als erstes eine Charakterisierung der beiden Summanden D und N finden, die von der Wahl der fixierten Basis des Vektorraums V unabhängig ist. Dazu beachten wir die drei folgenden Fakten.

• Die fixierte Basis von V ist eine Eigenbasis von D.
• Eine Potenz der Matrix N ist gleich Null.
• Es gilt D•N = N•D

Wir können also nach einer Zerlegung von

$$a: V \longrightarrow V$$

in eine Summe

$$a = d + n \tag{1}$$

von zwei k-linearen Endomorphismen

$$d: V \longrightarrow V \text{ und } n: V \longrightarrow V$$

fragen mit folgenden Eigenschaften.

1. Es gibt eine Basis von V, welche aus Eigenvektoren von d besteht.

---

[1] Wir nehmen hier an, daß der Grundkörper k algebraisch abgeschlossene ist. Im allgemeinen Fall gibt es ebenfalls eine Normalform, welche jedoch komplexer aufgebaut ist (vgl. Jacobson [4], Kapitel 3, Abschnitt 3.10)

2. Eine Potenz von n ist die Nullabbildung.
3. Die Endomorphismen d und n kommutieren: $d \circ n = n \circ d$.
Es stellt sich heraus, daß d und n durch diese drei Bedingungen eindeutig bestimmt sind. Die Zerlegung (1) heißt additive Jordan-Zerlegung. Unser erstes Ziel wird es sein, die Existenz und Eindeutigkeit dieseer Jordan-Zerlegung zu beweisen.

(iii) Wir brauchen eine weitere Anpassung an unsere Situation, denn unser Interesse gilt vor allem den umkehrbaren Matrizen und deren Multiplikation. Aus der Zerlegung (1) erhalten wir, wenn d umkehrbar ist,

$$a = d\bullet(1 + d^{-1}\bullet n) = d\bullet u \text{ mit } u = 1 + d^{-1}\bullet n.$$

Weil d und n kommutieren, gilt dasselbe auch für d^{-1} und n. Man sieht damit sofort, daß eine Potenz der Matrix $u - 1 = d^{-1}\bullet n$ ebenfalls gleich 0 ist. Wir erhalten so eine Produkt-Zerlegung

$$a = d\bullet u \tag{2}$$

mit folgenden Eigenschaften.
1. Es gibt eine Basis von V die aus Eigenvektoren von d besteht.
2. Eine Potenz von u-1 ist Null.
3. $d \circ u = u \circ d$.
Analog zur additiven Jordan-Zerleung sind d und u durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt. Die Zerlegung (2) heißt multipliktive Jordan-Zerlegung. Unser Hauptziel wird darin bestehen die wichtigsten Eigenschaften dieser Zerlegung zu beweisen. Dazu gehören deren Existenz und Eindeutigkeit in jeder linearen algebraischen Gruppe und die Tatsache, daß Homomorphismen von linearen algebraischen Gruppen, diese Zerlegung respektieren. Wir beginnen mit den grundlegenden Definitionen und zwei vorbereitenden Aussage.

12.2 Halbeinfache, nilpotente und unipotente Endomorphismen

Sei

$$V$$

ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum. Ein linearer Endomorphismus

$$a: V \longrightarrow V$$

von V heißt halbeinfach, wenn V eine Basis besitzt, welche aus Eigenvektoren von a besteht. Der Endomorphismus heißt nilpotent, wenn eine Potenz identisch 0 auf V ist,

$$a^s = 0$$

für eine natürliche Zahl s, und er heißt unipotent, wenn a - 1 nilpotent ist. Die Algebra der k-linearen Endomorphismen von V wird mit

$$\mathrm{End}(V) := \mathrm{End}_k(V)$$

bezeichnet.

Bemerkungen

(i) Ein linearer Endomorphismus $a: V \longrightarrow V$ ist genau dann halbeinfach, wenn es eine Basis von V gibt, bezüglich welcher die die Matrix von a Diagonalgestalt besitzt.

(ii) Ist die Charakteristik p des Grundkörpers positiv,

$$\mathrm{Char}(k) = p > 0,$$

so sind für einen k-linearen Endomorphismus $a: V \longrightarrow V$ die beiden folgenden Bedingungen äquivalent.
(a) a ist unipotent.
(b) Es gibt eine natürliche Zahl s mit $a^{p^s} = 1$.

(iii) Die Einheitengruppe der k-Algebra End(V) ist gerade **GL**(V). Durch die Wahl einer Basis $e_1,\ldots,e_n$ des k-Vektorraums V kann man End(V) mit der Algebra

$$\mathbf{M}_n$$

der n×n-Matrizen mit Einträgen aus k identifizieren und **GL**(V) mit $\mathbf{GL}_n$.

Beweis von (ii). (a) ⇒ (b). Nach Voraussetzung gibt es eine natürliche Zahl s mt

$$(a-1)^s = 0.$$

Wir wählen eine natürliche Zahl t mit $s \le p^t$ und multiplizieren mit $(a-1)^{p^t-s}$. Wir erhalten

$$(a-1)^{p^t} = 0.$$

Weil die Charakteristik von k gleich p > 0 ist, gilt

$$(a-1)^p = \sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i}\binom{p}{i}\cdot a^i =^2 a^p - 1$$

also

$$0 = (a-1)^{p^t} = a^{p^t} - 1,$$

also

$$a^{p^t} = 1.$$

(b) ⇒ (a). Aus $a^{p^t} = 1$ folgt

$$0 = a^{p^t} - 1 = (a-1)^{p^t},$$

d.h. a-1 ist nilpotent, also a unipotent.
QED.

12.3 Mengen von kommutierenden Matrizen

Sei $S \subseteq \mathbf{M}_n$ eine Menge von Matrizen, von denen je zwei miteinander kommutieren. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Es gibt ein $x \in \mathbf{GL}_n$ mit der Eigenschaft, daß xSx^{-1} aus oberen Dreiecksmatrizen besteht.

(ii) Sind alle Matrizen von S halbeinfach, dann gibt es ein $x \in GL_n$ derart, daß xSx^{-1} aus Diagonal-Matrizen besteht.

Beweis. Der Beweis der Aussage vereinfacht sich, wenn man sie in einer koordinaten-invarianten Weise formuliert:

Seien V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und $S \subseteq \mathrm{End}(V)$ eine Menge von Endomorpismen, von denen je zwei mitander kommutieren.
Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i') Es gibt eine vollständige[3] Fahne von k-linearen Unterräumen,

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V,$$

welche stabil sind gegenüber allen Endomorphismen aus S,

$$a(V_i) \subseteq V_i \text{ für alle i und alle } a \in S.$$

(ii') Sind alle Endomorphismen von S halbeinfach, so gibt eine Zerlegung von V in eine direkte Summe von eindimensionalen k-linearen Unterräumen

---

[2] Dies gilt auch im Fall der geraden Primzahl p = 2, denn in der Charakteristik 2 gilt -1 = +1.

[3] Es lassen sich keine weiteren Räume in die Fahne einfügen, ohne daß diese aufhört echt aufsteigend zu sein, d.h. die Dimension benachbarter Räume unterscheidet sich um 1, d.h. $\dim_k V_i = i$ für alle i.

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$$

welche S-stabil sind,

$$a(W_i) \subseteq W_i \text{ für alle i und alle } a \in S.$$

Zeigen wir zunächst, daß die Behauptung aus den beiden Aussagen (i') und (ii') folgt[4].

<u>(i') ⇒ (i)</u>. Wir setzen $V = k^n$ und identifizieren die Matrizen $A \in S$ mit den zugehörigen linearen Endomorphismen

$$V \longrightarrow V, x \mapsto A\bullet x.$$

Wir betrachten die nach (i') existierende Fahne und wählen eine mit der Fahne verträgliche Basis $v_1,\dots,v_n$ von V, d.h.

$$V_i = k\bullet v_1+\dots+k\bullet v_i \text{ für } i = 0, \dots , n.$$

Sei x der Automorphismus von V, welcher die Basis der v_i in die Standard-Einheitsbasis des k^n überführt,

$$x(v_i) = e_i .$$

Für $A \in S$ gilt dann $A\bullet V_i \subseteq V_i$, also

$$A\bullet v_i \subseteq k\bullet v_1+\dots+k\bullet v_i$$

Also

$$(x\bullet A\bullet x^{-1})\bullet e_i = x\bullet A\bullet v_i \subseteq x\bullet(k\bullet v_1+\dots+k\bullet v_i) = k\bullet e_1+\dots+k\bullet e_i.$$

Da dies für jedes i gilt, hat die Matrix $x\bullet A\bullet x^{-1}$ obere Dreiecksgestalt.

<u>(ii') ⇒ (ii)</u>. Wir setzen wieder $V = k^n$ und identifizieren die Matrizen $A \in S$ mit den zugehörigen linearen Endomorphismen

$$V \longrightarrow V, x \mapsto A\bullet x.$$

Wir betrachten die nach (ii') existierende Zerlegung von V in eine direkte Summe und wählen eine mit dieser Zerlegung verträgliche Basis $v_1,\dots,v_n$ von V, sagen wir

$$W_i = k\bullet v_i \text{ für } i = 1,\dots, n.$$

Weiter sei x der Automorphismus von V, welcher die Basis der v_i in die Standard-Einheitsbasis des k^n überführt,

$$x(v_i) = e_i .$$

Für $A \in S$ gilt $A(k\bullet v_i) \subseteq k\bullet v_i$, also $A(v_i) = c_i\bullet v_i$ mit $c_i \in k$. Damit ist

$$(x\bullet A\bullet x^{-1})\bullet e_i = x\bullet A\bullet v_i = x\bullet(c_i\bullet v_i) = c_i\bullet e_i ,$$

d.h. die Matrix A ist eine Diagonalmatrix.

<u>Beweis von</u> (i') <u>und</u> (ii'). Wir führen den Beweis durch Induktion nach

$$n := \dim V.$$

<u>Induktionsanfang</u>: n = 1.

Beide Aussagen sind trivial, denn

$$\{0\} \subset V$$

[4] Wir beschränken uns darauf zu zeigen, daß die Implikationen (i') ⇒ (i) und (ii') ⇒ (ii) bestehen. Es gilt aber sogar (i') ⇔ (i) und (ii') ⇔ (ii).

ist eine vollständige Fahne aus S-stabilen Unterräumen und jeder lineare Endomorphismus von V multipliziert die Vektoren von V mit einem festen $c \in k$, d.h.

$$V - \{0\}$$

besteht aus Eigenvektoren.

Induktionsschritt. $n > 1$.

Falls S aus Vielfachen der identischen Abbildung von V besteht, sind alle linearen Unterräume S-stabil. Man kann dann eine beliebige vollständige Fahne von V bzw. eine beliebige direkte Zerlegung in 1-dimensionale lineare Unterräume wählen. Die Fahne genügt dann den Bedingungen von (i') und die direkten Summanden der Zerlegung denen von (ii').

Wir können deshalb annehmen, ein $A \in S$ ist kein Vielfaches der identischen Abbildung. Weil k algebraisch abgeschlossen ist, besitzt A einen Eigenvektor, sagen wir

$$A\bullet v = c\bullet v \text{ mit } c \in k.$$

Sei $W \subseteq V$ der Eigenraum zum Eigenwert c von A,

$$W = \{v \in V \mid A\bullet v = c\bullet v\} = \mathrm{Ker}(A-c\bullet I).$$

Dann gilt

$$0 \subset W \subset V \text{ (echte Inklusionen).}$$[5]

Für jedes $B \in S$ und jedes $w \in W$ gilt dann (weil A und B kommutieren)

$$A(Bw) = B(Aw) = B(c\bullet w) = c\bullet Bw,$$

d.h. Bw ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert c, es gilt $B(w) \in W$. Da dies für jedes $w \in W$ gilt, folgt

$$B(W) \subseteq W \text{ für jedes } B \in S,$$

d.h. W ist S-stabil.

Betrachten wir die Situation von (i'). Wegen der S-Statilität von W induzieren Abbildungen von S lineare Endomorphismen auf W und auf dem Faktorraum

$$\overline{V} := V/W.$$

Wir bezeichnen die Menge der Einschränkungen der Elemente von S auf W mit

$$S' := \{B|_W : W \longrightarrow W \mid B \in S\}$$

und die Menge der durch die Elemente von S auf $\overline{V}$ induzierten Endomorphismen mit

$$S''.$$

Nach Konstruktion gilt

$$\dim W < \dim V \text{ und } \dim \overline{V} < \dim V.$$

Wir können die Induktionsvoraussetzung auf S' und S'' anwenden und erhalten in der Situation von (i') vollständige Fahnen

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_d = W \text{ und } 0 = \overline{V}_0 \subset \overline{V}_1 \subset \ldots \subset \overline{V}_{n-d} = \overline{V}$$

von W bzw. $\overline{V}$ aus k-linearen Unterräumen die S'-stabil bzw. S''-stabil sind. Bezeichne

$$\rho: V \longrightarrow \overline{V}$$

die natürliche Abbildung auf den Faktorraum. Wir setzen die vollständige Fahne von W mit den Urbildern bei ρ der Fahnen-Räume von $\overline{V}$ zusammen und erhalten eine vollständige Fahne

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_d\ (= \rho^{-1}(\overline{V}_0)) \subset \rho^{-1}(\overline{V}_1) \subset \ldots \subset \rho^{-1}(\overline{V}_{n-d}) = V$$

---

[5] Die linke Inklusion ist echt wegen $v \in W$, die rechte ist es, weil W kein Vielfaches der identischen Abbildung von V ist.

von V aus S-stabilen Unterräumen, d.h. es gilt (i').

In der Situation von (ii') ist $A \in S$ wie jedes Element von S halbeinfach. Der Raum V zerfällt in eine direkte Summe von Eigenräumen von A, sagen wir

$$V = W_1 \oplus ... \oplus W_t.$$

Die Anzahl t dieser Räume ist größer als 1, weil im Fall t = 1 die Abbildung A ein Vielfaches der identischen Abbildung wäre. Deshalb gilt

$$\dim W_i < \dim V \text{ für } i = 1, ... \ t.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist jedes W_i direkte Summe von 1-dimensionalen S-stabilen Unterräumen. Dasselbe gilt daann aber auch für die direkte Summe V der W_i, d.h. es gilt (ii').
QED.

12.4 Lemma: Operationen mit halbeinfachen, nilpotenten und unipotenten Endomorphismen
Seien V und W endlich-dimensionale k-Vektorräume. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Seien a, b: $V \longrightarrow V$ zwei kommutierende k-lineare Endomorphismen,

$$a \circ b = b \circ a.$$

Sind a und b halbeinfach (bzw. nilpotent bzw. unipotent), so gilt dasselben auch für

$$a \circ b: V \longrightarrow V.$$

(ii) Seien a: $V \longrightarrow V$ und b: $W \longrightarrow W$ zwei k-lineare Endomorphismen.
Sind a und b halbeinfach (bzw. nilpotent bzw. unipotent), so gilt dasselbe auch für

$$a \oplus b: V \oplus W \longrightarrow V \oplus W \text{ und } a \otimes b: V \otimes W \longrightarrow V \otimes W.$$

(iii) Seien a: $V \longrightarrow V$ und b: $W \longrightarrow W$ zwei k-lineare Endomorphismen.
Sind a unb b halbeinfach (bzw. nilpotent), so gilt dasselbe auch für

$$a \otimes 1 + 1 \otimes b: V \otimes W \longrightarrow V \otimes W.$$

Beweis. Zu (i) Wir wählen eine Basis von V und identifizieren a und b mit den Matrizen zu dieser Basis.
1. Fall: a und b sind halbeinfach.
Nach 2.4.2 (ii) gibt es eine Matrix x für welche xax^{-1} und xbx^{-1} Diagonalgestalt haben. Das Produk von Diagonal-Matrizen ist eine Diagonal-Matrix. Insbesondere ist

$$xax^{-1} \cdot xbx^{-1} = xabx^{-1}$$

eine Diagonal-Matrix, d.h. ab ist halbeinfach.
2. Fall: a und b sind nilpotent.
Nach Voraussetzung gilt

$$a^m = 0 = b^n.$$

Weil a und b kommutieren, folgt

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m = 0 \cdot b^m = 0.$$

3. Fall: a und b unipotent.
Nach Voraussetzung gibt es natürliche Zahlen m und n mit

$$(a-1)^m = 0 \text{ und } (b-1)^n = 0.$$

Es gilt

$$a(b-1) + (a-1) = ab - a + a - 1 = ab - 1.$$

Weil a und b kommutieren, folgt

$$(ab - 1)^{m+n} = (a(b-1) + (a-1))^{m+n} = \sum_{i=0}^{m+n} \binom{m+n}{i} \cdot a^i \cdot (b-1)^i \cdot (a-1)^{m+n-i}$$

Es reicht zu zeigen, jeder Summand unter dem Summenzeichen ist 0. Dazu reicht es zu zeigen, daß für jedes i einer der Faktoren gleich 0 ist.

Für $i \geq n$ ist $(b-1)^i = 0$. Für $i < n$, d.h. $m+n-i > m+n-n = m$ ist $(a-1)^{m+n-i} = 0$.

Zu (ii). 1. Fall: a und b sind halbeinfach.

Nach Voraussetzung können wir Basen

$$v_1, \dots , v_m \in V \text{ und } w_1, \dots , w_n \in W$$

von V bzw. W so wählen, daß gilt

$$a(v_i) = c_i \cdot v_i \text{ mit } c_i \in k \text{ und } b(w_j) = d_j \cdot w_j \text{ mit } d_j \in k.$$

Die Vektoren

$$(v_1,0), \dots , (v_m,0), (0,w_1), \dots , (0,w_n) \in V \oplus W$$

bilden eine Basis von $V \oplus W$ mit

$$(a\oplus b)(v_i , 0) = (a(v_i), b(0)) = (c_i \cdot v_i, 0) = c_i \cdot (v_i,0)$$

$$(a\oplus b)(0, w_j) = (a(0),b(w_j)) = (0,d_j \cdot w_j) = d_i \cdot (0, w_j)$$

Die $(v_i, 0)$ und $(0, w_j)$ bilden eine Eigenbasis, d.h. $a\oplus b$ ist halbeinfach.

Weiter bilden die $v_i \otimes w_j$ eine Basis von $V \otimes W$, und es gilt

$$(a\otimes b)(v_i \otimes w_j) = a(v_i) \otimes b(w_j) = (c_i v_i) \otimes (d_j \cdot w_j) = c_i d_j (v_i \otimes w_j)$$

d.h. die $v_i \otimes w_j$ bilden eine Eigenbasis, d.h. $a\otimes b$ ist halbeinfach.

2. Fall: a und b nilpotent.

Für jede natürliche Zahl n gilt

$$(a \oplus b)^n = a^n \oplus b^n$$

Nach Voraussetzung können wir n so groß wählen, daß a^n und b^n gleich 0 werden, dann ist aber $(a\oplus b)^n = 0$.

Weiter gilt

$$(a\otimes b)^n = a^n \otimes b^n,$$

d.h. es ist auch $(a\otimes b)^n = 0$ für große n.

3. Fall: a und b unipotent.

Für $x \in V$ und $y \in W$ gilt

$$(a\oplus 1 - 1\oplus 1) (x,y) = (a(x), y) - (x,y) = (a(x)-x, 0) = (a-1)\oplus 0 (x,y),$$

also

$$(a\oplus 1- 1\oplus 1) = (a-1)\oplus 0$$

$$(a\oplus 1- 1\oplus 1)^2 = (a-1)^2 \oplus 0$$

$$\dots$$

$$(a\oplus 1- 1\oplus 1)^n = (a-1)^n \oplus 0$$

Mit a ist also auch $a\oplus 1$ unipotent. Analog sieht man, daß auch $1\oplus b$ unipotent ist.

Weiter gilt

$$\begin{aligned}(a\oplus 1)(1\oplus b (x,y)) &= (a\oplus 1)(x, b(y)) \\ &= (a(x), b(y)) \\ &= (1\oplus b)(a(x), y) \\ &= (1\oplus b)((a\oplus 1)(x,y)).\end{aligned}$$

Die unipotenten Abbildungen $a\oplus 1$ und $1\oplus b$ kommutieren. Nach (i) ist auch die Zusammensetzung

$$a\oplus b = (a\oplus 1)\circ(1\oplus b)$$

unipotent.

Betrachten wir das Tensorprodukt von a und b. Für $x \in V$ und $y\in W$ gilt

$$(a\otimes 1 - 1\otimes 1)(x\otimes y) = a(x)\otimes y - x\otimes y = (a-1)\otimes 1\ (x\otimes y),$$

also

$$(a\otimes 1- 1\otimes 1) = (a-1)\otimes 1$$

also für jede natürliche Zahl n auch

$$(a\otimes 1- 1\otimes 1)^n = (a-1)^n\otimes 1$$

Die rechte Seite wird 0 für große n, d.h.

$a\otimes 1$ ist unipotent.

Analog ergibt sich, daß auch

$1\otimes b$ unipotent

ist. Die beiden Abbildung kommutieren. Nach (i) ist auch die Zusammensetzung

$$(a\otimes 1)\circ(1\otimes b) = a\otimes b$$

unipotent.

Zu (iii). 1. Fall: a und b halbeinfach.

Nach Voraussetzung können wir Basen

$$v_1, \dots , v_m \in V \text{ und } w_1, \dots , w_n \in W$$

von V bzw. W so wählen, daß gilt

$$a(v_i) = c_i\bullet v_i \text{ mit } c_i \in k \text{ und } b(w_j) = d_j\bullet w_j \text{ mit } d_j \in k.$$

Die Tensorprodukte $v_i\otimes w_j$ bilden eine Basis von $V\otimes W$, und es gilt

$$\begin{aligned}(a\otimes 1 + 1\otimes b)(v_i\otimes w_j) &= a(v_i)\otimes w_j + v_i\otimes b(w_j)\\ &= (c_i+d_j)\bullet v_i\otimes w_j,\end{aligned}$$

d.h. die $v_i\otimes w_j$ bilden eine Eigenbasis für $a\otimes 1 + 1\otimes b$, d.h.

$$a\otimes 1 + 1\otimes b$$

ist halbeinfach.

2. Fall: a und b nilpotent.

Für jede natürliche Zahl n gilt

$$(a\otimes 1)^n = a^n\otimes 1 \text{ und } (1\otimes b)^n = 1\otimes b^n.$$

Mit a und b sind auch $a\otimes 1$ und $1\otimes b$ nilpotent. Wir können n groß wählen, daß

$$(a\otimes 1)^n = 0 \text{ und } (1\otimes b)^n = 0$$

gilt. Weil $a\otimes 1$ und $1\otimes b$ kommutieren, folgt

$$\begin{aligned}(a\otimes 1 + 1\otimes b)^{2n} &= \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} (a\otimes 1)^i\circ(1\otimes b)^{2n-i}\\ &= \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} (a^i\otimes 1)\circ(1\otimes b^{2n-i})\end{aligned}$$

Es reicht zu zeigen, jeder Summand unter dem Summenzeichen rechts ist Null.

Für $i \ge n$ ist $a^i\otimes 1 = 0\otimes 1$ gleich Null. Für $i < n$ ist $2n-i > 2n-n = n$, also

$$1\otimes b^{2n-i} = 1\otimes 0 = 0$$

QED.

Index

Inhalt